SULLA GEOMETRIA IMMAGINARIA

DI LOBATSCHEWSKY

NOTA

PER

G. BATTAGLINI

La pubblicazione recente della traduzione francese di un opuscolo di *N. I. Lobatschewsky* *), ha richiamato l'attenzione dei Geometri sul sistema di Geometria, che col nome di *Geometria immaginaria* **) fu fondato da Lobatschewsky sopra una teoria delle parallele diversa dalla ordinaria teoria *euclidiana*.

In questa Nota ho cercato di stabilire direttamente il principio che serve di base alla *nuova* teorica delle parallele, e quindi di pervenire, in modo diverso da Lobatschewsky, alle formole che esprimono le relazioni tra le parti di un triangolo nel sistema della Geometria immaginaria.

1. Se per indicare una determinata posizione della retta indefinita Ω, che gira intorno ad un punto p in un piano P, conveniamo di adoperare il simbolo

$$\Omega_z = \Omega_0 F(z) ,$$

in cui z dinota la *quantità della rotazione* della retta variabile passando

*) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, von *N. Lobatschewsky*, Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrath und ordent. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan. Berlin 1840.

Etudes Géométriques sur la Théorie des Parallèles par *N. Lobatschewsky*, traduit de l'Allemand par *J. Houel*. Paris 1866.

**) Nouveaux principes de Géométrie avec une théorie complète des Parallèles. Mémoires de l'Université de Kasan; 1836, 1837, 1838.

Géométrie imaginaire. Crelle Journal. Band XVII. 1837

Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Parallèles. Kasan 1855.

da un'arbitraria posizione iniziale Ω_0 all'attuale posizione Ω_z, ed F è la caratteristica di un'ignota funzione, sarà

$$\Omega_x = \Omega_0 F(x)\,, \qquad \Omega_y = \Omega_0 F(y)\,,$$
$$\Omega_z = \Omega_x F(z-x) = \Omega_y F(z-y)\,;$$

si avrà quindi per determinare F la relazione

$$F(x)F(z-x) = F(y)F(z-y)\,,$$

ovvero, ponendo $x=0$, osservando che $F(0)=1$, e cambiando poi z in $x+y$,

$$(1) \qquad F(x+y) = F(x)F(y)\,.$$

Derivando l'equazione (1) rispetto ad x, e rispetto ad y, se ne dedurrà, indicando con k una costante,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{F'(z)}{F(z)} = k\,,$$

e quindi, essendo e la base dei logaritmi naturali,

$$(2) \qquad F(z) = e^{kz} = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Girando indefinitamente la retta Ω intorno al punto p nel piano P, essa passerà periodicamente per ogni sua determinata posizione; questa proprietà dà il mezzo come determinare la costante k contenuta in $F(z)$, però siccome, allorchè la variabile z è reale, la funzione e^{kz} non può riprendere periodicamente gli stessi valori, a meno che k non sia una quantità immaginaria pura, considereremo in vece di e^{kz} la funzione e^{ikz}, essendo $i=\sqrt{-1}$.

Chiamiamo, rispetto alla *base* k, *coseno ciclico* e *seno ciclico* di z le espressioni

$$(3) \qquad \begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \\ \operatorname{sen} z &= \frac{kz}{1} - \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^5z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots \end{aligned}$$

tangente ciclica e *cotangente ciclica* di z le funzioni $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$; sarà

$$e^{ikz} = \cos z + i \operatorname{sen} z\,, \qquad e^{-ikz} = \cos z - i \operatorname{sen} z\,,$$

$$e^{2ikz} = \frac{1 + i\tan z}{1 - i\tan z} = \frac{\cot z + i}{\cot z - i}\,,$$

relazioni da cui si ricavano facilmente le note espressioni di $\cos(x+y)$, $\operatorname{sen}(x+y)$, $\tan(x+y)$ e $\cot(x+y)$.

Sia 2π il valore di kz che dà

$$e^{2i\pi} = \cos\frac{2\pi}{k} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{k} = 1\,,$$

sarà $\frac{2\pi}{k}$ il *periodo* della funzione e^{ikz}; osservando che dalla condizione precedente si trae $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, sarà per ogni valore intero, positivo o negativo, di $2n+1$, o pure di $2n$, $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2k} = 0$, o pure $\operatorname{sen} 2n\frac{\pi}{2k} = 0$, si avranno quindi le espressioni, in prodotti continui,

$$\begin{aligned} \cos z &= \left(1 - \frac{4k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4k^2z^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ldots \\ \operatorname{sen} z &= kz\left(1 - \frac{k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{k^2z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{k^2z^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

dalla seconda delle quali, ponendo $kz = \frac{\pi}{2}$, si trae

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots\ldots}\,,$$

onde $\pi = 3{,}14159\ldots\ldots$

Adunque, prendendo per *unità di rotazione* della retta Ω, intorno al punto p nel piano P, la quarta parte della rotazione, dopo la quale la retta ritorna *per la prima volta* alla sua posizione iniziale si avrà $\frac{2\pi}{k} = 4$, e quindi $k = \frac{\pi}{2}$; la quantità z nelle formole precedenti sarà la *misura* dell'angolo compreso tra le rette Ω_0 ed Ω_1, riferito all'angolo retto preso per unità. Per maggiore semplicità delle formole supporremo $k=1$, il che corrisponde a prendere per unità degli angoli l'angolo retto diviso pel numero $\frac{\pi}{2}$.

Agli stessi risultati si perviene se col simbolo $\Omega = \Omega_0 F(z)$ si convie-

ne d'indicare una determinata posizione del piano Ω che gira intorno ad una retta l, essendo z la *quantità della rotazione* del piano variabile passando dalla posizione iniziale Ω_0 all'attuale Ω_z. Supponendo come sopra $k=1$, sarà z la misura dell'angolo compreso tra i piani Ω_0 ed Ω_z, essendo l'unità cui esso si riferisce l'angolo diedro retto diviso per $\frac{\pi}{2}$.

Indichiamo ora col simbolo $x_z=x_0 F(z)$ una determinata posizione del punto x che percorre una retta L, essendo z la *quantità della progressione* del punto variabile passando dalla posizione iniziale x_0 all'attuale x_z. Si avrà ancora l'equazione (2), però siccome, percorrendo il punto p la retta L indefinitamente, non si ha più la condizione del periodico passaggio di p per ogni sua determinata posizione, in tal caso la costante k dovrà ritenersi *indeterminata*.

Chiamiamo, rispetto alla *base* k, *Coseno iperbolico* e *Seno iperbolico* di z le espressioni

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Cos}\,z &= 1 + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \\ \mathrm{Sen}\,z &= \frac{kz}{1} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^5z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Tangente iperbolica, e *Cotangente iperbolica* *) di z le funzioni

$$\mathrm{Tan}\,z = \frac{\mathrm{Sen}\,z}{\mathrm{Cos}\,z}, \qquad \mathrm{Cot}\,z = \frac{\mathrm{Cos}\,z}{\mathrm{Sen}\,z};$$

sarà

$$e^{kz} = \mathrm{Cos}\,z + \mathrm{Sen}\,z, \qquad e^{-kz} = \mathrm{Cos}\,z - \mathrm{Sen}\,z$$

$$e^{2kz} = \frac{1+\mathrm{Tan}\,z}{1-\mathrm{Tan}\,z} = \frac{\mathrm{Cot}\,z + 1}{\mathrm{Cot}\,z - 1},$$

relazioni da cui si ricavano facilmente le espressioni di $\mathrm{Cos}(x+y)$, $\mathrm{Sen}(x+y)$, $\mathrm{Tan}(x+y)$ e $\mathrm{Cot}(x+y)$.

In generale si passerà dalle funzioni cicliche alle iperboliche, o viceversa per mezzo delle formole

$$\cos z = \mathrm{Cos}\,i\frac{z}{k}, \quad i \operatorname{sen} z = \mathrm{Sen}\,i\frac{z}{k},$$

$$i \tan z = \mathrm{Tan}\,i\frac{z}{k}, \quad -i \cot z = \mathrm{Cot}\,i\frac{z}{k};$$

mentre le funzioni cicliche hanno il periodo *reale* 2π, le funzioni iperboliche hanno il periodo *immaginario* $2i\frac{\pi}{k}$

*) In vece dei nomi di funzioni *cicliche* e *iperboliche* si potrebbero adoperare quelli di funzioni di *rotazione* e di *progressione*.

Nelle formole precedenti la quantità z è la misura del segmento compreso tra i punti ω_0 ed ω_1, riferito ad un segmento *arbitrario* preso per unità; se per maggiore semplicità si voglia supporre $k=1$, si prenderà per unità dei segmenti l'unità primitiva divisa per la costante k.

2. Ciò premesso; consideriamo in un piano il sistema dei punti ω di una retta L, ed il sistema delle rette Ω che li congiungono con un punto p; se m, n sono due posizioni fisse di ω, ed M, N sono le posizioni corrispondenti di Ω, per ogni posizione determinata di ω, o pure di Ω, il rapporto $\frac{\text{Sen}\, m\omega}{\text{Sen}\, \omega n}$, o pure il rapporto $\frac{\text{sen}\, M\Omega}{\text{sen}\, \Omega N}$ avrà *un solo valore*, positivo o negativo, e viceversa per un valore positivo o negativo dell'uno o dell'altro di quei due rapporti, il punto ω, o pure la retta Ω, prenderà *una sola determinata* posizione; quindi osservando che ad ogni posizione di ω corrisponde *una sola* posizione di Ω e viceversa, indicando con λ una costante, si avrà evidentemente la relazione

$$\frac{\text{Sen}\, m\omega}{\text{Sen}\, \omega n} = \lambda \frac{\text{sen}\, M\Omega}{\text{sen}\, \Omega N}. \tag{1}$$

Supponiamo i punti m ed n ad eguale distanza dal piede o della perpendicolare O abbassata dal punto p sulla retta L, e quindi le rette M ed N egualmente inclinate alla retta O; sarà $\lambda=1$, sicchè ponendo $o\omega=\theta$, $O\Omega=\Theta$, l'equazione (1) darà

$$\frac{\text{Tan}\,\theta}{\tan\Theta} = \frac{\text{Tan}\,\frac{1}{2}mn}{\tan\frac{1}{2}MN} = \textit{cost}. \tag{2}$$

Allorchè il punto m percorre la retta L, nel verso positivo o negativo, da o all'infinito, $\text{Tan}\,\theta$ prende tutt'i valori da zero a $+1$ o a -1; nel limite delle posizioni di ω le rette corispondenti Ω comprenderanno con O (dall'una o dall'altra parte) un angolo Δ *diverso dall'angolo retto* (a meno che p non si trovi su di L) e determinato dall'equazione

$$\tan\Delta = \frac{\tan\frac{1}{2}MN}{\text{Tan}\,\frac{1}{2}mn}, \tag{3}$$

si ha così il concetto fondamentale della teoria delle parallele di Lobatschewsky, cioè che *da un punto* p *si possono tirare due rette parallele ad una retta* L, o sia due rette che *incontrano* L *a distanza infinita*.

Dalle equazioni (2) e (3) si ha

$$\text{Tan}\,\theta=\frac{\tan\Theta}{\tan\Delta}, \tag{4}$$

sicchè sarà $\text{Tan}\,\theta \lesseqgtr 1$, (e quindi θ reale o immaginaria) secondo che $\Theta \lesseqgtr \Delta$; segue da ciò che ogni retta Ω condotta per p, e compresa nell'angolo 2Δ incontrerà la retta L in un punto ω, alla distanza *finita* da o espressa da

$$\theta=\frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Delta+\tan\Theta}{\tan\Delta-\tan\Theta}, \tag{5}$$

ed ogni retta Ω condotta per p e compresa nell'angolo supplementare di 2Δ incontrerà la retta L in un punto, alla distanza *ideale* da o espressa da

$$\theta=\frac{1}{2k}\log\frac{\tan\Theta+\tan\Delta}{\tan\Theta-\tan\Delta}+i\frac{\pi}{2k}; \tag{6}$$

le due parallele condotte dal punto p alla retta L (e che l'incontrano a distanza *infinita*) segnano il passaggio dalle rette che, condotte per p, incontrano L in punti a distanza *finita* a quelle che incontrano L in punti a distanza *ideale*. I punti ideali d'incontro delle rette Ω con la retta L li riguarderemo come *punti della retta al di là dell'infinito*.

L'equazione (3) mostra che variando la distanza δ del punto p dalla retta L varia ancora *l'angolo di parallelismo* Δ, sicchè il *numero* che esprime l'angolo Δ sarà una certa funzione del *numero* che esprime la distanza δ; ponendo $\cot\Delta=\Phi(\delta)$ determineremo fra poco la funzione Φ; osserviamo intanto che, per le diverse posizioni del punto p sulla perpendicolare O alla retta fissa L, tutte le rette Ω per le quali il rapporto $\frac{\tan\Theta}{\tan\Delta}$ ha un determinato valore (minore, eguale, o maggiore dell'unità) incontreranno L in uno stesso punto (a distanza finita, infinita, o ideale) determinato dall'equazione (4), e viceversa; tutte le rette corrispondenti a $\frac{\tan\Theta}{\tan\Delta}=\infty$, o sia tutte le rette perpendicolari ad O, incontrano L nel punto ideale determinato da $\theta=i\frac{\pi}{2k}$, e tutte le rette corrispondenti ad ogni altro valore di $\frac{\tan\Theta}{\tan\Delta}$ maggiore dell'unità, incontrando L nel punto ideale determinato dall'equazione (6), saranno tutte perpendicolari ad

una stessa retta, cioè alla retta perpendicolare ad L condotta pel punto determinato da

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\tan\Theta + \tan\Delta}{\tan\Theta - \tan\Delta};$$

segue da ciò che ogni punto d'incontro ideale di due rette si può considerare come punto d'incontro ideale di due rette qualunque perpendicolari ad una medesima retta. Il punto ideale nel quale concorrono tutte le rette perpendicolari ad una stessa retta (il quale dista per $i\frac{\pi}{2k}$ da tutt'i punti della medesima) si dirà il *polo* di quella retta.

Se nelle formole precedenti la costante k si suppone eguale a zero, l'equazione (2) riducendosi a

$$\frac{\theta}{\tan\Theta} = \frac{\frac{1}{2}mn}{\tan\frac{1}{2}MN},$$

si fa manifesto che l'angolo di parallelismo sarà retto, qualunque sia la distanza del punto p dalla retta L; in tale ipotesi tutte le rette condotte per p incontrano quindi L a distanza finita, ad eccezione delle *due parallele coincidenti*, le quali incontrano L in *due punti coincidenti all'infinito*. Si ha così il concetto fondamentale della teoria delle parallele di Euclide.

Le due teorie delle parallele, di Lobatschewsky e di Euclide, corrispondono a due concetti diversi che possiamo formarci della linea retta, relativamente ai suoi punti all'infinito. Secondo Lobatschewsky, la linea retta, a partire da ogni suo punto o, si distende all'infinito dall'una e dall'altra parte di o, però i suoi due punti all'infinito, in parti opposte di o, sono tra loro *distinti*, sicchè non si potrà passare sulla retta dall'una all'altra parte di o, se non passando per o nel *campo finito* della retta (dai valori positivi cioè ai negativi della distanza z di un punto p della retta da o, passando per zero) o pure attraversando *un campo ideale della retta al di là dell'infinito* (passando cioè z per valori immaginarii). Secondo Euclido al contrario, la linea retta distendendosi ancora all'infinito dall'una e dall'altra parte di ogni suo punto o, i suoi due punti all'infinito in parti opposte di o sono tra loro *coincidenti*, vale a dire la linea retta è una *linea indefinita rientrante in sè stessa*, sicchè si passerà sulla retta dall'una all'altra parte di o, passando per o, o pure pel punto della retta situato all'infinito (dai valori positivi cioè ai negativi di z passando per zero o per ∞).

Considerando ora intorno ad un punto il sistema delle rette ∞ giacenti

in un piano P, ed il sistema dei piani Ω che passano per esse e per una retta l, si avrà analogamente ad (1) la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} m\omega}{\operatorname{sen} \omega n} = \lambda \frac{\operatorname{sen} M\Omega}{\operatorname{sen} \Omega N},$$

e supponendo le rette m ed n egualmente inclinate alla retta o d'intersezione del piano P col piano O ad esso perpendicolare e condotto per la retta l, e quindi i piani M ed N egualmente inclinati al piano O, si avrà analogamente a (2)

$$\frac{\tan\theta}{\tan\Theta} = \frac{\tan\frac{1}{2}mn}{\tan\frac{1}{2}MN} = cost.$$

Allorchè ω gira nel piano P, pel verso positivo o negativo, a partire da o, $\tan\theta$ prende tutt'i valori da zero a $+\infty$ o a $-\infty$, lo stesso avverrà quindi per $\tan\Theta$; sicchè in tal caso non hanno luogo le osservazioni precedenti intorno all'incontro a distanza finita, infinita, o ideale di Ω e P; osserveremo solamente che determinando l'angolo Δ dall'equazione

$$\tan\Delta = \frac{\tan\frac{1}{2}MN}{\tan\frac{1}{2}mn}, \qquad \text{onde} \qquad \tan\theta = \frac{\tan\Theta}{\tan\Delta},$$

sarà l'angolo Δ funzione dell'angolo δ compreso tra la retta l ed il piano P, sicchè si avrà fra Δ e δ una relazione della forma $\cot\Delta = \varphi(\delta)$.

3. Cerchiamo ora le relazioni tra le parti di un triangolo, e supponiamo in primo luogo che il triangolo abbia un angolo retto C; siano A e B i due angoli obliqui, opposti rispettivamente ai lati a e b, e sia c l'ipotenusa; per le cose dette si avranno evidentemente le relazioni

$$(1) \qquad \operatorname{Tan} a = \phi(b)\tan A, \qquad \operatorname{Tan} b = \phi(a)\tan B,$$

da cui si trae

$$(2) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{\operatorname{Tan} a}{\sqrt{\operatorname{Tan}^2 a + \phi^2(b)}} = \frac{\operatorname{Sen} a}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2 a + \phi^2(b) + \operatorname{Sen}^2 a \cdot \phi^2(b)}} \\ \operatorname{sen} B &= \frac{\operatorname{Tan} b}{\sqrt{\operatorname{Tan}^2 b + \phi^2(a)}} = \frac{\operatorname{Sen} b}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2 b + \phi^2(a) + \operatorname{Sen}^2 b \cdot \phi^2(a)}}. \end{aligned}$$

Osservando che, *qualunque* sia c, per $\operatorname{sen} A = 0$, o pure $\operatorname{sen} B = 0$, dovrà

essere $a=0$, o pure $b=0$, e per $\operatorname{sen} A=1$, o pure $\operatorname{sen} B=1$, dovrà essere $a=c$, o pure $b=c$, è facile vedere che $\operatorname{sen} A$ e $\operatorname{sen} B$ dovranno essere espressioni della forma

$$\operatorname{sen} A=\frac{f(a)}{f(c)}\,,\qquad \operatorname{sen} B=\frac{f(b)}{f(c)}\,;$$

inoltre dovendo essere evidentemente c funzione simmetrica di a e b, tale sarà ancora $f(c)$; si avrà quindi, per soddisfare a tali condizioni,

$$(3)\qquad \Phi(a)=\operatorname{Tan} a=f(a)\,,\qquad \Phi(b)=\operatorname{Tan} b=f(b)\,,$$

o pure

$$(4)\qquad \Phi(a)=\operatorname{Sen} a=f(a)\,,\qquad \Phi(b)=\operatorname{Sen} b=f(b)\,.$$

L'equazioni (3) corrispondono al sistema della Geometria *euclidiana;* ed infatti dalle equazioni (1), (2), (3) si trae

$$(5)\qquad \begin{gathered}\operatorname{sen} A=\cos B=\frac{\operatorname{Tan} a}{\operatorname{Tan} c}\,,\qquad \operatorname{sen} B=\cos A=\frac{\operatorname{Tan} b}{\operatorname{Tan} c}\,,\\ \operatorname{Tan}^2 c=\operatorname{Tan}^2 a+\operatorname{Tan}^2 b\,;\end{gathered}$$

ora abbassando da C la perpendicolare sull'ipotenusa c, e chiamando α e β i segmenti di c adiacenti ad A e B, si avrà per le relazioni (5)

$$\begin{gathered}\operatorname{Tan}\alpha=\operatorname{Tan} b\cos A=\frac{\operatorname{Tan}^2 b}{\operatorname{Tan} c}\,,\qquad \operatorname{Tan}\beta=\operatorname{Tan} a\cos B=\frac{\operatorname{Tan}^2 a}{\operatorname{Tan} c}\,,\\ \operatorname{Tan} c=\operatorname{Tan}(\alpha+\beta)=\operatorname{Tan}\alpha+\operatorname{Tan}\beta\,;\end{gathered}$$

quest'ultima equazione conduce alla condizione $\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Sen}\beta=0$, laonde essendo

$$\operatorname{Sen}\alpha=k\alpha+\frac{k^3\alpha^3}{2.3}+\ldots.\,,\qquad \operatorname{Sen}\beta=k\beta+\frac{k^3\beta^3}{2.3}+\ldots.$$

sarà $k=0$, e l'equazioni (5) si ridurranno alle note formole della ordinaria trigonometria piana

$$(6)\qquad \begin{gathered}\operatorname{sen} A=\cos B=\frac{a}{c}\,,\qquad \operatorname{sen} B=\cos A=\frac{b}{c}\,,\\ c^2=a^2+b^2\,.\end{gathered}$$

Le equazioni (4) corrispondono invece al sistema della Geometria *non-euclidiana;* ed infatti dall'equazioni (1), (2), (4) si trae

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
&\mathrm{Sen}\,a = \mathrm{Sen}\,c\,\mathrm{sen}\,A\,, &\qquad &\mathrm{Sen}\,b = \mathrm{Sen}\,c\,\mathrm{sen}\,B\,,\\
&\mathrm{Tan}\,a = \mathrm{Tan}\,c\cos B\,, & &\mathrm{Tan}\,b = \mathrm{Tan}\,c\cos A\,,\\
&\qquad \mathrm{Cos}\,c = \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b = \cot A\cot B\,, & &\\
&\cos A = \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{sen}\,B\,, & &\cos B = \mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{sen}\,A\,,\\
&\mathrm{Tan}\,a = \mathrm{Sen}\,b\tan A\,, & &\mathrm{Tan}\,b = \mathrm{Sen}\,a\tan B\,,
\end{aligned}
$$

che sono (sotto forma alquanto diversa) le relazioni date da Lobatschewsky *).

Le formole (7) si riducono alle (6) allorchè i lati del triangolo proposto sono infinitamente piccoli.

Segue dalle cose dette che tra l'angolo di parallelismo Δ e la distanza δ di un punto p da una retta L si ha la relazione $\mathrm{sen}\,\delta\tan\Delta = 1$, onde

$$
(8) \qquad \tan\Delta = \frac{1}{\mathrm{Sen}\,\delta}\,, \qquad \mathrm{sen}\,\Delta = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,, \qquad \cos\Delta = \mathrm{Tan}\,\delta\,;
$$

le formole (7) mostrano che l'angolo acuto compreso fra due rette s'incontrano in un punto all'infinito è eguale a zero, e quello compreso fra due rette che s'incontrano in un punto ideale è espresso da $ik\delta$, essendo δ la lunghezza della loro perpendicolare comune.

Con un procedimento analogo al precedente si otterranno le relazioni tra le parti di un trièdro, che ha un angolo dièdro retto; queste relazioni si possono dedurre dalle formole (7) ponendo $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$ invece di a, b, c.

Consideriamo ora un triangolo qualunque; siano a, b, c i suoi lati, valutati percorrendo il perimetro del triangolo per uno stesso verso, e siano A, B, C gli angoli *esterni* del triangolo compresi tra (b, c), (c, a), (a, b); sia γ la perpendicolare abbassata dal vertice C sul lato c, e siano

*) Études Géometriques etc pag. 27.

(C_α, C_β), e (c_α, c_β) le due parti dell'angolo C e del lato c determinate da γ; si avranno evidentemente le relazioni

$$\operatorname{sen} A \operatorname{Sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{Sen} a = \operatorname{Sen} \gamma ,$$

$$\tan C_\alpha = -\frac{\cot A}{\operatorname{Cos} b} , \qquad \tan C_\beta = -\frac{\cot B}{\operatorname{Cos} a} ,$$

$$\operatorname{Tan} c_\alpha = -\operatorname{Tan} b \cos A , \qquad \operatorname{Tan} c_\beta = -\operatorname{Tan} a \cos B ,$$

$$\tan(C_\alpha + C_\beta) = -\tan C = \frac{\tan A \operatorname{Cos} b + \tan B \operatorname{Cos} a}{1 - \tan A \tan B \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b} ,$$

$$\operatorname{Tan}(c_\alpha + c_\beta) = -\operatorname{Tan} c = \frac{-\operatorname{Tan} a \cos B - \operatorname{Tan} b \cos A}{1 + \operatorname{Tan} a \operatorname{Tan} b \cos A \cos B} ,$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\operatorname{Sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{Sen} b}{\operatorname{sen} B} ,$$

$$(9) \qquad \frac{\tan A}{\operatorname{Cos} a} + \frac{\tan B}{\operatorname{Cos} b} + \frac{\tan C}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b} - \tan A \tan B \tan C = 0 ,$$

$$\frac{\operatorname{Tan} a}{\cos A} + \frac{\operatorname{Tan} b}{\cos B} + \frac{\operatorname{Tan} c}{\cos A \cos B} + \operatorname{Tan} a \operatorname{Tan} b \operatorname{Tan} c = 0 .$$

Ponendo

$$\Sigma^2 = 1 - \operatorname{Cos}^2 a - \operatorname{Cos}^2 b - \operatorname{Cos}^2 c + 2 \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c ,$$

$$\sigma^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C ,$$

le formole (9), con le loro analoghe, daranno

$$\frac{\operatorname{Sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{\operatorname{Sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 B} = \frac{\operatorname{Sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 C} = \frac{-\sigma^2}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C} ,$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{Sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{Sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{Sen}^2 c} = \frac{\Sigma^2}{\operatorname{Sen}^2 a \operatorname{Sen}^2 b \operatorname{Sen}^2 c} ,$$

$$(10) \qquad \begin{aligned}
\operatorname{Cos} a &= \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c + \operatorname{Sen} b \operatorname{Sen} c \cos A , \\
\operatorname{Cos} b &= \operatorname{Cos} c \operatorname{Cos} a + \operatorname{Sen} c \operatorname{Sen} a \cos B , \\
\operatorname{Cos} c &= \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b + \operatorname{Sen} a \operatorname{Sen} b \cos C , \\
\cos A &= \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{Cos} a , \\
\cos B &= \cos C \cos A - \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \operatorname{Cos} b , \\
\cos C &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{Cos} c ,
\end{aligned}$$

**

e tre qualunque di queste equazioni serviranno per esprimere le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo.

Le equazioni (10) restano inalterate ponendo $i\frac{A}{k}$, $i\frac{B}{k}$, $i\frac{C}{k}$, ika, ikb, ikc invece di a, b, c, A, B, C; segue da ciò che ad ogni triangolo ne corrisponde un altro ideale, ed i vertici di ciascuno di questi due triangoli corrispondenti sono rispettivamente i *poli* dei lati dell'altro.

Le formole (10) si riducono alle note formole della ordinaria Trigonometria piana allorchè i lati del triangolo proposto sono infinitamente piccoli.

Con un procedimento analogo al precedente si otterranno le relazioni tra le parti di un triedro, le quali si possono dedurre dalle equazioni (10) ponendo $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$ invece di a, b, c.

Da quanto precede si fa manifesto che nella Geometria del piano le relazioni metriche delle figure dipendono dalla costante k, la quale non potendo essere determinata *a priori* (a meno che tra i due concetti della linea retta, esposti precedentemente, non si voglia prescegliere l'euclidiano) dovrà ritenersi, *nella scienza pura*, come assolutamente *indeterminata*; se per l'omogeneità dalle formole si pone $kl=1$, sarà l la lunghezza di una certa retta, la quale si deve cercare di determinare allorchè si vuol procedere alle applicazioni *pratiche* della Geometria; per ottenere ciò basta eseguire *una sola esperienza*, misurare cioè le parti di un triangolo (l'unità degli angoli essendo l'angolo retto diviso pel numero $\frac{\pi}{2}$, e l'unità delle lunghezze una retta arbitraria), o sostituendo i numeri che le rappresentano in una delle equazioni (10) (o in altra che se ne deduca) ricavare da essa il numero k; si avrà quindi l eguale alla retta presa per unità, divisa per k. Per esempio se a ed A sono il lato e l'angolo di un triangolo equilatero, e quindi equiangolo, si avrà per determinare k l'equazione

$$ka=\log\frac{1+\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}A-1}}{1-\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}A-1}},$$

si trova così (dipendentemente dai nostri mezzi di osservazione, ed in relazione alla nostra stessa organizzazione) per k un valore tanto piccolo che l eccede tutto ciò che è misurabile per noi; siamo quindi ricondotti nella pratica alla Geometria euclidiana.

Se la retta l si prende per unità di lunghezza le formole (10) diverranno più semplici, dovendosi supporre allora $k=1$.

4. Se per i punti medii dei lati a, b, c di un triangolo s'innalzano le perpendicolari, esse s'incontreranno in uno stesso punto (a distanza finita, infinita, o ideale) il quale sarà ad eguale distanza dai vertici A, B, C del triangolo; chiamando r il raggio del circolo circoscritto al triangolo, ed α, β, γ gli angoli al centro, opposti ai suoi lati, si avranno le relazioni

$$(1)\qquad \begin{gathered} \frac{\mathrm{Sen}\frac{1}{2}a}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\mathrm{Sen}\frac{1}{2}b}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}\beta}=\frac{\mathrm{Sen}\frac{1}{2}c}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}\gamma}=\mathrm{Sen}\,r\,, \\ \tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma=\pi\,, \end{gathered}$$

dalle quali, ponendo per brevità

$$\Pi^2=\left(\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}c\right)\left(\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}b+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}c-\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}a\right)$$
$$\left(\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}c+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}a-\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}b\right)\left(\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}b-\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}c\right)$$

si ricava

$$(2)\qquad \mathrm{Sen}\,r=\frac{\mathrm{Sen}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sen}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sen}\frac{1}{2}c}{\Pi}\,.$$

Sia $a<b<c$; il centro del cerchio sarà a distanza finita, infinita, o ideale, secondo che si ha

$$\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}a+\mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}b \gtreqless \mathrm{Sen}\tfrac{1}{2}c\,.$$

Tutt'i punti del circolo sono ad eguale distanza non solo dal centro, ma ancora dalla retta di cui quel centro è il polo; tale retta cade a distanza ideale, infinita, o finita, secondo che il centro cade a distanza finita, infinita, o ideale; la distanza δ dei punti del circolo dalla retta che ha per polo il suo centro è data dalla formola

$$(3)\qquad \mathrm{Cos}\,\delta=\frac{\mathrm{Sen}\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sen}\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sen}\frac{1}{2}c}{i\Pi}\,.$$

Tutt'i circoli che hanno lo stesso centro (a distanza finita, infinita, o ideale) tagliano ortogonalmente tutte le rette condotte per esso; se s, s' ed S, S' sono due archi e due settori corrispondenti ad uno stesso angolo Δ al centro comune dei circoli di raggi ρ e ρ', si avrà

$$(4)\qquad \frac{s}{s'}=\frac{\mathrm{Cir.}\,\rho}{\mathrm{Cir.}\,\rho'}=\frac{\mathrm{Sen}\,\rho}{\mathrm{Sen}\,\rho'}\,;\qquad \frac{S}{S'}=\frac{\mathrm{Sup.}\,\rho}{\mathrm{Sup.}\,\rho'}=\frac{\mathrm{Sen}^2\frac{1}{2}\rho}{\mathrm{Sen}^2\frac{1}{2}\rho'}\,;$$

se ρ' è infinitamente piccolo, verrà

$$\frac{s}{\Delta}=\frac{\text{Cir.}\,\rho}{2\pi}=\frac{\text{Sen}\,\rho}{k}\,;\qquad \frac{S}{\frac{1}{2}\Delta}=\frac{\text{Sup.}\,\rho}{\pi}=\frac{\text{Sen}^2\frac{1}{2}\rho}{\frac{1}{4}k^2}\,,$$

e quindi

$$(5)\qquad \begin{gathered} s=\frac{\Delta}{k}\,\text{Sen}\,\rho\,,\quad \text{Cir.}\,\rho=\frac{2\pi}{k}\,\text{Sen}\,\rho\,,\\ S=\frac{2\Delta}{k^2}\,\text{Sen}^2\,\tfrac{1}{2}\rho=\frac{s}{k}\,\text{Tan}\,\tfrac{1}{2}\rho\,;\qquad \text{Sup.}\,\rho=\frac{4\pi}{k^2}\,\text{Sen}^2\,\tfrac{1}{2}\rho=\frac{\text{Cir.}\,\rho}{k}\,\text{Tan}\,\tfrac{1}{2}\rho\,. \end{gathered}$$

Se il centro comune dei due circoli è all'ifinito, ponendo $\rho-\rho'=\delta$, e chiamando t la corda doll'arco s, sarà

$$(6)\qquad \begin{gathered} s'=se^{-\frac{\delta}{k}}\,,\qquad S'=Se^{-\frac{2\delta}{k}}\\ s=\frac{2\,\text{Sen}\,\frac{1}{2}t}{k}\,,\qquad S=\frac{2\,\text{Sen}\,\frac{1}{2}t}{k^2}\,. \end{gathered}$$

Finalmente se il centro comune dei due circoli è ideale, indicando con δ o δ' le distanze costanti dei loro punti dalla retta che ha il centro per polo, e con τ la proiezione su questa rotta della corda dell'arco s, si avrà

$$(7)\qquad \begin{gathered} \frac{s}{s'}=\frac{\text{Cos}\,\delta}{\text{Cos}\,\delta'}\,,\qquad \frac{S}{S'}=\frac{\text{Cos}^2\frac{1}{2}\delta}{\text{Cos}^2\frac{1}{2}\delta'}\,,\\ s=\tau\,\text{Cos}\,\delta\,,\qquad S=\frac{\tau}{k}\left(\text{Sen}\,\delta+i\right)\,. \end{gathered}$$

5. Se il sistema delle rette condotte da un punto p ai diversi punti di una retta L si fa girare con L intorno alla perpendicolare O abbassata da p su di L, la retta L, girando intorno al piede o della perpendicolare, descriverà un piano P perpendicolare ad O, e si vedrà immodiatamente per le cose dette quali siano le rette condotte per p che incontrano P a distanza finita, infinita, o idoale; tutte le rette che incontrano P in un punto ideale sono perpendicolari ad uno stosso piano, di cui quel punto è il *polo*.

Nel sistema della Geometria *non-euclidiana* il piano è una superficie indefinita, essendo i suoi punti all'infinito tutti *distinti* tra loro ed appartenenti ad una *circonferenza di circolo*, che ha per centro un punto *qualunque* del piano ed il raggio infinito; similmente per lo spazio, i punti all'infinito sono tutti *distinti* tra loro ed appartengono ad una *superficie*

sferica, che ha per centro un punto *qualunque* ed il raggio infinito. Al contrario nel sistema della Geometria *euclidiana*, il piano è una superficie indefinita e *rientrante in sè stessa*, avendo i suoi punti all'infinito coincidenti a coppie con i punti di una *linea retta;* similmente lo spazio è un continuo indefinito e *rientrante in sè stesso*, avendo i suoi punti all'infinito coincidenti a coppie con i punti di un *piano*.

Senza entrare per ora in altri sviluppi sull'oggetto, esaminiamo solamente il triangolo sferico determinato dallo intersezioni delle tre facce di un angolo solido, di vertice p, con la superficie sferica descritta dalla rotazione intorno ad O del circolo di centro p e di raggio ρ. Se A, B, C ed a, b, c sono le inclinazioni delle facce, e gli angoli piani dell'angolo solido (valutati come si è detto nel numero 3) saranno A, B, C gli angoli *esterni* del triangolo sferico, e le lunghezze α, β, γ dei suoi lati saranno date dalle fomole

$$\frac{\alpha k}{a}=\frac{\beta k}{b}=\frac{\gamma k}{c}=\text{Sen}\,\rho\,. \tag{1}$$

Ponendo

$$2\pi-(A+B+C)=\varepsilon\,, \tag{2}$$

è noto che ε è la misura della superficie S del triangolo sferico (vale a dire per due triangoli appartenenti ad una stessa superficie sferica si ha $\frac{S}{S'}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$) e che il valore di ε è dato dalla formola

$$\tan^2\tfrac{1}{4}\varepsilon=\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{4}(b+c-a)\tan\tfrac{1}{4}(c+a-b)\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)\,,$$

(3) o sia

$$\tan^2\tfrac{1}{4}\varepsilon=\tan\tfrac{1}{4}k\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\text{Sen}\,\rho}\tan\tfrac{1}{4}k\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\text{Sen}\,\rho}\tan\tfrac{1}{4}k\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\text{Sen}\,\rho}\tan\tfrac{1}{4}k\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\text{Sen}\,\rho}\,.$$

Potendo variare il secondo membro dell'equazione (5) da zero all'infinito, sarà ε compresa tra zero e 2π, sicchè i triangoli appartenenti ad una superficie sferica che ha il centro a distanza finita, hanno la somma dei loro angoli esterni compresa fra zero e quattro retti.

Se il centro della sfera cade a distanza infinita, essendo a, b, c quantità infinitamente piccole, tale sarà pure ε, sicchè i triangoli appartenenti ad una superficie sferica col centro a distanza infinita avranno la somma dei loro angoli esterni eguale sempre a quattro retti; adunque per tali triangoli essendo

$$\frac{\alpha}{\text{sen}\,A}=\frac{\beta}{\text{sen}\,B}=\frac{\gamma}{\text{sen}\,C}\,,$$

(4)

$$A+B+C=2\pi\,,$$

tra i loro lati ed i loro angoli si avranno le ralazioni della ordinaria Trigonometria piana.

Nel caso attuala potendo porre nell'equazione (3) gli angoli invece delle loro tangenti, facendo

$$(5)\qquad E^2=\frac{1}{16}(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)\,,$$

si avrà per dua triangoli della suporficie sferica di raggio infinito

$$\frac{S}{S'}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{E}{E'}\,.$$

Se il centro della sfera cada a distanza ideala, essendo δ la distanza comune dei punti della suparficia sferica dal piano che ha il centro per *polo*, si avrà

$$(6)\qquad \tan^2\tfrac{1}{4}\varepsilon=\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\mathrm{Cos}\,\delta}\,,$$

e nel caso particolare di $\delta=0$, in cui la superficie sferica si riduce ad un piano, verrà

$$(7)\ \tan^2\tfrac{1}{4}\varepsilon=\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma-\alpha)\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha-\beta)\,\mathrm{Tan}\,\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma)\,.$$

La quantità ε, passando per zero, col variare del raggio, è ora divenuta negativa, sicchè potando variare il secondo membro doll'equazione (6) o (7) da zero all'unità, sarà ε compresa tra zero e $-\pi$, adunque i triangoli appartenenti ad una superficie sferica che ha il centro a distanza idealo (come caso particolare i triangoli piani) hanno la somma dei loro angoli estorni compresa tra quattro retti e sei retti.

Per due triangoli appartenenti ad una superficie sferica di raggio ideale (ed in particolare per due triangoli piani) si ha poi sempre la relazione

$$\frac{S}{S'}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,.$$

Supposto $\alpha<\beta<\gamma$, il valore di E o di ε dato da una dello formole (5), (6), (7) è reale, si annulla, o diviene immaginario, secondo che si ha $\alpha+\beta\gtreqless\gamma$; seguo da ciò che in un triangolo appartenenta ad una superficie sferica, col centro a distanza infinita, o ideale, il lato più grande